

Завгородній О.І.

Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка

Левкін Д.А.

Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка

Котко Я.М.

Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка

Левкін А.В.

Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОГНОЗУВАННЯ ЙМОВІРНИХ РИЗИКІВ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Актуальність дослідження розрахункових і прикладних оптимізаційних математичних моделей зумовлена необхідністю підвищення якості функціонування технологічних і біотехнологічних процесів, стан об'єктів яких вони описують. Наведені результати досліджень авторів можуть бути використані для оптимізації параметрів випромінювачів під час розтину штучної та натуральної шкіри, лазерної сварки біологічного матеріалу, ділення ранніх елітних ембріонів.

У статті побудована крайова задача диференціальних рівнянь теплопровідності, які описують стан багатошарового об'єкта під дією дискретних джерел випромінювання. Коректність розрахункової та прикладних оптимізаційних математичних моделей доведена за допомогою використання методів, заснованих на теорії диференціальних і псевдодиференціальних операторів у просторі узагальнених функцій степеневого зростання. Водночас через те, що для реалізації прикладних оптимізаційних математичних моделей потрібне значення температурного поля, то їхня коректність зумовлена коректністю крайових задач, які лежать в основі розрахункових математичних моделей.

Використавши методи відокремлених змінних і невизначених коефіцієнтів, знайшли розв'язок крайової задачі процесу термічної дії на кулястий тришаровий матеріал. Для оцінки травмованості технологічної системи автори пропонують використати декілька прикладних оптимізаційних математичних моделей. За допомогою поверхневого співвідношення об'ємів травмованого матеріалу до об'єму всього матеріалу в статті відшуканий відсоток травмованості досліджуваного об'єкта. На основі проведених розрахунків обґрунтовано вибір алгоритму аналізу ефективності процесу термічної дії на матеріал. Проведені дослідження можна розглядати як різновид економіко-математичного моделювання прогнозування ймовірних ризиків під час забезпечення технологічних процесів термічного навантаження на матеріал.

Ключові слова: технологічні процеси, оптимізація, крайові задачі, економіко-математичне моделювання, ризик.

Постановка проблеми. Питанням оптимізації технологічних, механічних, електротехнічних, біотехнологічних та інших систем присвячено велику кількість наукових публікацій і розробок. Це пов'язане перш за все з тим, що дослідження стану модельованих систем знаходиться в різних наукових областях. Окрім того, специфіка оптимізації таких систем полягає в тому, що для розв'язання прикладних оптимізаційних математичних моделей пошуку раціональних значень управляючих параметрів фізичних полів необхідно забезпечити ітераційний процес побудови і розв'язання великого числа крайових задач, що

призводитиме до збільшення часу. До того ж, у зв'язку з тим фактом, що досить часто доводиться здійснювати математичне моделювання багатошарових систем, то необхідно показати, чи буде система диференціальних рівнянь з крайової задачі мати і до того ж єдиний розв'язок.

У статті запропоновано алгоритм для здійснення оптимізації технологічних систем, які містять джерела навантаження фізичних полів. Відзначимо, що проведені авторами розрахунки можна трактувати як різновид економіко-математичного моделювання технологічних процесів з метою прогнозування ймовірних ризиків витрат

досліджуваного матеріалу. Авторами розв’язана система диференціальних рівнянь теплопровідності з крайовою задачею, яка описує стан досліджуваної системи, запропоновані декілька прикладних оптимізаційних математичних моделей для оптимізації функції мети і параметрів систем, розраховані втрати досліджуваного матеріалу при здійсненні технологічного процесу. Результати проведених розрахунків можуть бути використані для прогнозування ймовірних ризиків витрат досліджуваного матеріалу при забезпеченні технологічних, біотехнологічних, механічних та інших процесів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Деякі питання економіко-математичного моделювання для прийняття управлінських рішень контролю можливих ризиків на підприємствах розглянуті в роботах [1–11]. Фундаментальні дослідження стосовно до розв’язання прикладних задач розрахунку та оптимізації технологічних і біотехнологічних систем наведені в роботах [1–7]. Авторами публікацій [1–7] наведені та детально досліджені методи і алгоритми для розв’язання цілої низки розрахункових і прикладних оптимізаційних задач. Запропонований комплексний підхід до розрахунку економічного ефекта функціонування транспортних [8; 9] і аграрних підприємств [10; 11] в умовах дії факторів ринкової економіки. Для роботи результати досліджень [1–11] важливі в контексті аналізу можливих підходів до вирішення прикладних задач економіко-математичного моделювання, які виникають у різних галузях. До того ж, дослідження цієї статті можуть бути застосовані для розрахунку можливих ризиків технологічних, біотехнологічних, електротехнічних і гідродинамічних процесів. Зазнають зміни постановки розрахункових математичних моделей і, можливо, методи реалізації розрахунку та спрямованого перебору локальних екстремумів функції мети, але сам алгоритм для прогнозування ймовірних ризиків залишиться без змін.

Постановка завдання. Вдосконалити чисельний алгоритм прогнозування ймовірних ризиків технологічних процесів за рахунок реалізації декількох прикладних оптимізаційних моделей для пошуку рекордних значень управляючих параметрів технологічних систем.

Виклад основного матеріалу дослідження. Для побудови економіко-математичної моделі прогнозування ймовірних ризиків витрат досліджуваного матеріалу при забезпеченні технологічних процесів авторами запропонований комплексний підхід. У статті вдосконалені результати отримані

в публікації [12], в частині врахування специфіки модельованого процесу термічної дії на тришаровий матеріал.

Розглянемо процес точкового термічного навантаження на тришаровий матеріал. Для визначеності, в якості досліджуваного об’єкта будемо розглядати ембріон під дією лазерним променем. В основі розрахункової математичної моделі, яка описує стан модельованої системи лежить система диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} 5.5 \frac{\partial T_1}{\partial t} = 0.7 \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r_1} \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + 55; \\ 5.44 \frac{\partial T_2}{\partial t} = 0.96 \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{2}{r_2} \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) + 94; \\ 5 \frac{\partial T_4}{\partial t} = 0.9 \left(\frac{\partial^2 T_4}{\partial r^2} + \frac{2}{r_4} \frac{\partial T_4}{\partial r} \right) + 452, \end{cases} \quad (1)$$

де r – просторова координата проникнення випромінювання;

t – часова координата.

Граничні умови Дірихле служать для завдання початку та кінця дії випромінювання:

$$\begin{cases} T(0; 0) = 100 \text{ } ^\circ\text{C}; \\ T(55; 185) = 37 \text{ } ^\circ\text{C}. \end{cases} \quad (2)$$

Граничні умови третього роду:

$$-0,67 \frac{\partial T_1}{\partial r}(0, t) = 4,4. \quad (3)$$

Питомий тепловий контакт:

$$\begin{cases} T_1(20; 35) = T_2(30; 70), & -0,71 \frac{\partial T_1}{\partial r} = -0,96 \frac{\partial T_2}{\partial r}; \\ T_2(30; 70) = T_3(40; 105), & -0,96 \frac{\partial T_2}{\partial r} = -0,94 \frac{\partial T_3}{\partial r}; \\ T_3(40; 105) = T_4(50; 140), & -0,94 \frac{\partial T_3}{\partial r} = -0,91 \frac{\partial T_4}{\partial r}. \end{cases} \quad (4)$$

Рівності неперервності температурних полів:

$$\begin{cases} T(20; 35 - 0) = T(20; 35 + 0); \\ T(30; 70 - 0) = T(30; 70 + 0); \\ T(40; 105 - 0) = T(40; 105 + 0); \\ T(50; 140 - 0) = T(50; 140 + 0). \end{cases} \quad (5)$$

Для доведення коректності розглянутої багаточислової крайової задачі застосована теорія диференціальних і псевдодиференціальних операторів у просторі узагальнених функцій степеневого зростання. Це дало можливість авторам отримати умови коректності розрахункових і прикладних оптимізаційних математичних моделей.

Розбивши розв’язок диференціального рівняння теплопровідності на суму загального однорідного та часткового неоднорідного розв’язку і використавши метод відокремлених змінних, отримали два диференціальні рівняння:

$$v'(t) = cv(t), \quad (6)$$

$$u''(r) + \frac{2}{r}u'(r) - 5.6cu(r) = 0. \quad (7)$$

Розв'язок диференціального рівняння (6) отримати не складно ($v(t) = e^{ct}$), тоді, як розв'язок диференціального рівняння (7) потрібно шукати у вигляді степеневого ряду:

$$u(r) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^{k-1}. \quad (8)$$

Далі, підставивши розв'язок $v(t) = e^{ct}$ та степеневий ряд (7) в диференціальне рівняння з системи (1) та провівши низку обчислень, отримали функцію розподілу температурного поля:

$$T(r, t) = 100e^{ct} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(5.6c)^k r^{2k}}{((2k+1)!!)^2} - q_e r^2, \quad (9)$$

де q_e – питома густина потужності теплових навантажень в матеріалі.

Для обчислення температури нагріву в шарах досліджуваного матеріалу розглянемо, в загальному вигляді, розв'язок рівняння теплопровідності на брусі $[t_1, t_2] \times [r_1, r_2]$:

$$T(r, t) = c_1 e^{ct} \left(1 + \frac{cr^2}{9a} + \dots \right) - \frac{qr^2}{6a} \quad (10)$$

з крайовими умовами Діріхле:

$$\begin{cases} T(r_1, t_1) = T_1; \\ T(r_2, t_2) = T_2. \end{cases} \quad (11)$$

Підставивши крайові умови (11) в розв'язок (10), отримали систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} c_1 e^{ct_1} \left(1 + \frac{cr_1^2}{9a} + \dots \right) = T(r_1, t_1) + \frac{qr_1^2}{6a}; \\ c_1 e^{ct_2} \left(1 + \frac{cr_2^2}{9a} + \dots \right) = T(r_2, t_2) + \frac{qr_2^2}{6a}. \end{cases} \quad (12)$$

Розділимо перше рівняння на друге:

$$e^{c(t_1-t_2)} = \frac{T(r_1, t_1) + \frac{qr_1^2}{6a}}{T(r_2, t_2) + \frac{qr_2^2}{6a}} \times \frac{\left(1 + \frac{cr_2^2}{9a} \right)}{\left(1 + \frac{cr_1^2}{9a} \right)}. \quad (13)$$

Отже:

$$c_1 = \frac{T(r_1, t_1) + \frac{qr_1^2}{6a}}{e^{ct_1} \left(1 + \frac{cr_1^2}{9a} \right)}. \quad (14)$$

Використавши метод невизначених коефіцієнтів, отримали, що температура нагріву клітин становить 65°C , периветильованого простору – $86,2^\circ\text{C}$.

Для оптимізації температурного поля та параметрів випромінювачів скористаємося прикладними оптимізаційними математичними моделями.

Математична модель 1 полягає в мінімізації максимального значення модуля різниці між отриманими значеннями температурного поля і його припустимими значеннями:

$$\min_{z^* \in Z} \max_{\substack{(x_i, y_i, z_i) \in \Omega_i \\ i=1, N \\ t \in [t_0, t^*]}} |T_i(x_i, y_i, z_i, t, z^*) - T^*|, \quad (15)$$

де $T_i(x_i, y_i, z_i, t, z^*)$ – температурне поле (функція мети); $(x_i, y_i, z_i) \in \Omega^*$ – область матеріала; z^* – вектор параметрів дії, до якого входять: розмір області матеріалу, час дії випромінювання, інтенсивність та енергія випромінювання, траєкторія та швидкість руху джерела поверхнею матеріалу, густина термічного навантаження; t_0 – початковий момент часу дії випромінювання; t^* – кінцевий момент часу; T^* – припустиме значення температурного поля.

Математична модель 2 гарантує досягнення мінімуму максимального значення температурного поля в точках контролю:

$$\min_{z^* \in Z} \max_{\substack{(x_i, y_i, z_i) \in \Omega_i \\ i=1, N \\ t \in [t_0, t^*]}} T_i(x_i, y_i, z_i, t, z^*). \quad (16)$$

Позначення залишаються такими ж, як в математичній моделі 1.

Математична модель 3 полягає в мінімізації об'ємів травмованого матеріалу.

$$\min_{z^* \in Z} \max_{\substack{(x_i, y_i, z_i) \in \Omega_i \\ i=1, N \\ t \in [t_0, t^*]}} \frac{V_{\text{segm.}}(T)}{V} \times 100\%, \quad (17)$$

де $V_{\text{segm.}}(T)$ – об'єм травмованого сегменту матеріала; V – об'єм цілого матеріалу.

Інші позначення залишаються такими ж, як в математичній моделі 1.

Формула для розрахунку об'єму $V_{\text{segm.}}(T)$ травмованого сегменту матеріала:

$$V_{\text{segm.}}(T) = \pi \left(r_1 h_1 - \frac{h_1^3}{3} \right), \quad (18)$$

де h_1 – відрізок просторової координати r_1 .

Використовуючи інтегральний критерій (математична модель 3), розрахували, що клітини травмовані приблизно на 11%. Цей результат є уточненими у порівнянні з отриманим результатом в публікації [7]. Більш детально реалізація розрахункових і прикладних оптимізаційних математичних моделей наведена в публікаціях авторів [12–15].

Висновки. У статті наведений різновид економіко-математичного моделювання прогнозування ймовірних ризиків при забезпеченні технологічних процесів. У якості досліджуваного об'єкта авторами розглянутий ембріон під дією локальних, дискретних джерел випромінювання. Використавши методи експертного оцінювання параме-

трів випромінювачів і виходячи з теплофізичних характеристик досліджуваного об'єкта, авторами побудована крайова задача процесу термічної дії, за допомогою методів відокремлених змінних і невизначених коефіцієнтів розраховані температури дії на матеріал. Для пошуку локальних екстремумів технічних параметрів випромінювачів і оцінки витрат матеріалу в статті запропоновано використати декілька прикладних оптимізаційних

математичних моделей. Використавши відношення об'ємів травмованого матеріалу до об'єму всього піддослідного матеріалу, знайдена травмованість останнього. Отримані результати дали змогу авторам підвищити якість технологічного процесу термічної дії на матеріал за рахунок вдосконалення методики прогнозування втрат піддослідного матеріалу і витрат ресурсів програмно-апаратних засобів забезпечення технологічних процесів.

Список літератури:

1. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. Киев : Наукова думка, 1986. 268 с.
2. Рвачев В.Л., Слесаренко А.П. Алгебро-логические и проекционные методы в задачах теплообмена. Киев : Наукова думка, 1978. 140 с.
3. Scoblo T.S., Klochko O.Y., Romanchenko V.N., Belkin E.L. Features of the carbide phase degradation under heating and deformation. *Letters on Materials*. 2021. Vol. 11. Issue 1. P. 22–27.
4. Скобло Т.С., Мартыненко А.Д., Бантковский В.А., Гончаренко А.А., Сайчук А.В., Тихонов А.В., Лысенко С.В. Использование лазерных технологий для упрочнения и восстановления изделий из сталей и сплавов. *Технічний сервіс агропромислового, лісового та транспортного комплексів*. 2019. № 15. С. 142–162.
5. Макаров А.А., Николенко И.Г. Частичная параболичность краевой задачи для псевдодифференциальных уравнений в слое. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Математика, прикладна математика і механіка*. Харків, 2019. Т. 89. С. 21–32. DOI: 10.26565/2221-5646-2019-89-03.
6. Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кмить І.Я., Поліщук В.М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. Київ : Наукова думка, 2002. 416 с.
7. Douglas-Hamilton D.H., Conia J. Thermal effects in laser-assisted pre-embryo zona drilling. *Journal of Biomedical Optics*. 2001. Vol. 6. Issue 2. P. 205. DOI: 10.1117/1.1353796.
8. Бережна Н.Г., Біляєва О.С., Войтов В.А., Горяїнов О.М., Карнаух М.В., Кравцов А.Г., Кутья О.В., Музильов Д.О., Шраменко Н.Ю. Проблеми транспортно-логістичного забезпечення в аграрній галузі. Харків : Міськдрук, 2019. 180 с.
9. Vojtov V., Kutiya O., Berezhnaja N., Karnaukh M., Belyaeva O. Modeling of reliability of logistic systems of urban freight transportation taking into account street congestion. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019. Vol. 4. No. 3. P. 15–21. DOI: 10.15587/1729-4061.2019.175064.
10. Levkina R.V., Kravchuk I.I., Sakhno I.V., Kramarenko K.M., Shevchenko A.A. The economic-mathematical model of risk analysis in agriculture in conditions of uncertainty. *Financial and credit activity: problems of theory and practice*. 2019. Vol. 3. No. 30. P. 248–255.
11. Levkina R., Petrenko A. Management of innovative marketing techniques as an effective business tool. *Agricultural and Resource Economics: International Scientific E-Journal*. 2019. Vol. 5. Issue 1. P. 37–47. DOI: 10.22004/ag.econ.287141.
12. Levkina R., Levkin A., Petrenko A., Kolomiets N. Current approaches to biotechnology in animal husbandry. *International Journal of Advanced Science and Technology*. 2020. Vol. 29. Issue 8. Special issue. P. 2463–2469.
13. Левкін Д.А. Методологія дослідження технологічних процесів. *Вчені записки Таврійського Національного Університету імені В.І. Вернадського. Серія: «Технічні науки»*. Київ, 2020. Т. 31(70). № 4. С. 93–97. DOI: <https://doi.org/10.32838/2663-5941/2020.4/13>.
14. Skoblo T.S., Sidashenko O.I., Saichuk O.V., Klochko O.Y., Levkin D.A. Influence of Stresses on Structural Changes in Gray Cast Iron. *Materials Science*. 2020. Vol. 56. Issue 3. P. 347–358.
15. Левкин Д.А. Математическое моделирование и оптимизация многослойных систем. *Енергетика і автоматика*. Київ : НУБіП України, 2019. № 1(41). С. 45–56. DOI: 10.31548/energiya2019.01.045.

Zavgorodniy A.I., Levkin D.A., Kotko Ya.M., Levkin A.V. ECONOMIC AND MATHEMATICAL MODELING OF PROBABILITY RISK FORECASTING OF TECHNOLOGICAL PROCESSES

The relevance of the work of computational and applied optimization mathematical models is due to the necessity to improve the quality of technological and biotechnological processes, the state of the described objects. The results of the authors' research can be used to optimize the parameters of the emitters in the opening of artificial and natural leather, laser welding of biological material, division of early elite embryos.

The boundary value problem of differential equations of thermal conductivity, which describes the state of a multilayer object under the action of discrete radiation sources, is constructed in the article. The correctness of computational and applied optimization mathematical models is proved by using methods based on the theory of differential and pseudodifferential operators in the space of generalized functions of power growth. Moreover, since the implementation of applied optimization mathematical models requires the value of the temperature field, the correctness of applied optimization mathematical models is due to the correctness of the boundary value problems that underlie the calculated mathematical models.

Using the methods of separate variables and indeterminate co-efficients, we found a solution to the boundary value problem of the process of thermal action on a spherical three-layer material. To assess the injury of the technological system, the authors propose to use several applied optimization mathematical models. Using the surface ratio of the volumes of thermally injured material to the volume of all material in the article, the trauma of the investigated object was found. Based on the calculations, the choice of the algorithm for analyzing the efficiency of the process of thermal action on the material is substantiated. The conducted researches can be considered as a kind of economic and mathematical modeling of forecasting of probable risks at maintenance of technological processes of thermal loading on material.

Key words: *technological processes, optimization, boundary value problems, economic and mathematical modeling, risk.*